



**Curso: MATEMÁTICA FINANCEIRA: ENSINO E
EMPRESARIAL**

**Disciplina: MODELAGEM NO ENSINO DA
MATEMÁTICA FINANCEIRA**

Prof. MS. MÁRCIO FONSECA



Modelagem no ensino da matemática financeira

CONCEITOS GERAIS

1. Termos Financeiros

Ação: Título representativo de uma fração do capital social de uma companhia. As ações, conforme a natureza dos direitos ou vantagens que confirmam a seus titulares, são ordinárias, preferenciais ou de fruição. Todas as ações devem ser emitidas e circular sob a forma nominativa.

Aceite: Declaração que o devedor em um título de crédito assina, concordando com os termos do mesmo título (valor, vencimento e praça de pagamento) e reconhecendo a dívida adquirida.

Amortização: Redução gradual do principal (valor nominal da dívida, sem contar os juros) de uma dívida por meio de pagamentos periódicos combinados entre o credor e o devedor.

Alocação de recursos: Diz respeito às decisões quanto à utilização dos recursos (ou seja, "para onde vão"), especialmente na aquisição e combinação dos diversos insumos necessários à prestação de serviços.

Análise de eficiência: Trata-se de conseguir a realização de um determinado trabalho de forma correta, com custo e tempo menores. É a proporção do custo total (dinheiro) e recursos escassos (tempo) que pode ser relacionada com o benefício atualmente realizado.

Análise de produtividade: É a relação entre o valor dos produtos obtidos e os meios utilizados nessa produção. Produtividade tem uma relação entre a produção obtida e o número de pessoas empregadas para gerar essa produção. Num sentido mais técnico, a produtividade é entendida como a relação entre a produção obtida por unidade produtiva, num período determinado, e os insumos para tanto utilizados.

Análise financeira: São necessários instrumentos de análise das demonstrações para que certos aspectos mais importantes possam ser analisados com maiores detalhes. A análise vertical e horizontal são instrumentos dessa análise financeira.

Ativo: Registra os bens e direitos dos serviços, isto é, o que ele já possui e o que ele tem a receber.

Auditoria: É um exame pericial, total ou parcial, executado por um auditor, das finanças e do capital de uma instituição, numa data determinada, bem como exame das transações financeiras durante o período fiscal que termina nessa data.

Tem como objetivo a comprovação das operações contábeis por meio desse exame analítico e pericial.



Capital: Fundo de longo prazo com o qual a empresa é financiada *ou* é a soma de todos os recursos, bens e valores, mobilizados para a construção de uma empresa.

Cash: Dinheiro contado à vista; pagamento em dinheiro. *CASH BASIS* – venda à dinheiro. *CASH DISCOUNT* – desconto para pagamento à vista.

Commodity: Nas relações comerciais internacionais, o termo designa um tipo particular de mercadoria em estado bruto ou produto primário de importância comercial, como é o caso do café, algodão, estanho, cobre...

Capital de giro: É o conjunto de valores necessários para a empresa fazer seus negócios acontecerem (girar).

Centros de custo: Classificam-se em produtivos e administrativos e, eventualmente, em auxiliares. Em empresas comerciais os custos são analisados sob dois aspectos (fixos e variáveis).

Centros de custo produtivo: São aqueles setores da empresa onde se processa a fabricação dos produtos.

Centros de custo administrativo: São os setores que executam atividades de caráter gerencial ou administrativo da empresa.

Conta: Registro do movimento de depósitos e retiradas.

Controle financeiro: Consiste, basicamente, em comparar o que foi previsto/ planejado com o que está sendo realizado, isto é, se as metas estão sendo atingidas.

Custo: Valor dos bens ou serviços consumidos ou aplicados em um período definido para produzir outros bens ou serviços nesse mesmo período.
É o valor de todos os recursos utilizados na produção e distribuição de bens e serviços.

Custo de oportunidade: O reconhecimento do valor de um bem ou serviço pode ser medido em termos de ser esse valor a sua melhor alternativa de uso.

Custo marginal: É a mudança do custo total resultante do incremento da produção de mais uma unidade do produto. Acréscimo no custo total resultante do incremento de uma unidade no volume de produção.

Custo médio: É o quociente que se obtém ao dividir o custo total de produção de um bem, produto ou resultado pelo número de unidades produzidas ou serviços prestados.



Custo padrão: Calcula antecipadamente, com base na experiência passada e nos objetivos fixados para o período atual, os custos que devem ocorrer no período. À medida de sua ocorrência, os custos reais e históricos são registrados e comparados com os custos padrões, e as variações encontradas são analisadas. Esse custo permite que a análise dos custos seja feita imediatamente após sua ocorrência e não depois de um período mais ou menos longo.

Custos diretos: São aqueles incorridos com a organização e operacionalização de determinado produto/serviço.

Custos fixos: São aqueles que não variam devido às alterações do nível de produção da empresa, ou seja, dentro de um mês ou outra unidade de tempo, assumem determinado valor independentemente de nesse mesmo período a empresa ter um nível maior ou menor de atividade.

Custos indiretos: São os gastos fixos que não variam com o volume de produção.

Custos semifixos e semivariáveis: Alguns custos apresentam um comportamento, a curto prazo, que pode ser decomposto em duas parcelas: um componente fixo e outro variável. A reunião desses componentes resulta num comportamento misto cuja denominação é "semifixo" ou "semivariável".

Custos totais: É a soma dos custos fixos e variáveis da empresa; podem ser separados em dois tipos: custos diretos, que incidem diretamente sobre o bem ou o serviço produzido e são facilmente identificáveis e atribuíveis ao bem ou serviço em questão, e os indiretos, que são relativos a um grupo de bens ou serviços, ou a todos eles, e que são de atribuição mais difícil.

Custos variáveis: São aqueles que, dentro de certo mês, ou outra unidade de tempo, têm o valor total determinado exatamente como decorrência direta do nível de atividade da empresa. A classificação variável aplica-se ao custo que demonstra um comportamento que depende exclusivamente das variações do nível de produção. Depreciação: significa a perda de eficiência funcional ou valor dos bens, como máquinas, instalações, veículos, etc. Para a economia, a depreciação está intimamente ligada à idéia de diferença entre valores. Para a contabilidade, a depreciação é um custo amortizado.

Despesa / Débito: O valor despendido na aquisição de um bem ou na prestação de um serviço; implica necessariamente um dispêndio de dinheiro. Em uma transação financeira, débito é uma movimentação em que o saldo é negativo.

Fluxo de caixa: Refere-se ao montante de caixa recebido e gasto por uma empresa durante um período de tempo definido, algumas vezes ligado a um projeto específico.



Insumos: São recursos ou matérias-primas. Os insumos incluem recursos humanos, materiais médicos ou hospitalares, equipamentos e instalações e a tecnologia para operá-los; eles têm, necessariamente, um custo, mesmo que a unidade que os utilize não realize nenhum desembolso direto por eles.

Liquidez: É a capacidade de um bem ou direito se transformar em "dinheiro vivo" num curto espaço de tempo. A liquidez dos ativos de uma instituição é importante porque permite que ela faça pagamentos imprevistos ou de curto prazo, realizando rapidamente aplicações, estoques ou outro bem. Por extensão, diz-se que uma empresa "tem liquidez" quando ela tem ativos de curto prazo em montante suficiente para pagar suas dívidas de curto prazo e ainda enfrentar imprevistos.

Movimentos: Registrar em uma conta depósitos e retiradas.

Orçamento base zero: É um processo operacional de planejamento e orçamento que exige de cada administrador a fundamentação da necessidade dos recursos totais solicitados e em detalhes lhe transfere o ônus da prova, a fim de que ele justifique a despesa. No orçamento base zero, desconsidera-se o anterior e se parte a cada ano como se fosse do zero para se justificar tudo.

Passivo: Registra as obrigações, ou dívidas, e o patrimônio líquido, que é a parte que pertence aos proprietários.

Planejamento financeiro: Consiste em definir a política e os objetivos financeiros dos serviços – investimento, crescimento, etc. – e prover o volume e os tipos dos recursos necessários para atingir esses objetivos, bem como a aplicação desses recursos. A elaboração e o estabelecimento de um plano ou orçamento integrado de atividades são freqüentemente considerados como a função principal.

Plano de contas: É uma listagem de contas com símbolos numéricos para todas as contas de Ativo, Passivo, Capital, Receitas e Despesas. O plano de contas consiste em uma estruturação ordenada e sistematizada das contas utilizáveis numa entidade. A elaboração de um plano contábil obedece aos princípios de contabilidade geralmente aceitos e às normas legais aplicáveis em cada caso concreto. O plano contém as diretrizes técnicas gerais e especiais que orientam a realização dos registros dos fatos ocorridos e dos atos praticados na entidade.

Ponto de equilíbrio: Nasce da conjugação dos custos totais com as receitas totais. É a quantidade ou valor em que a receita total é igual ao custo total; nesse ponto, não há prejuízo nem lucro.

Projeção de fluxo de caixa: É a estimativa do fluxo de entrada e saída de dinheiro ou outras formas de recebimento e pagamento como cheque, cartão no caixa de uma empresa, baseado em dados passados e projeções de cenários futuros.



Receita / Crédito: O valor recebido pela venda de bens ou prestação de serviços. Crédito é uma movimentação com saldo positivo.

Saldo: Diferença entre débitos e créditos numa conta. Resto de uma quantia a pagar ou a receber. Excedente da receita sobre a despesa.

2. Juro Simples

A Matemática Financeira trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo. O seu objetivo básico é o de efetuar análises e comparações dos vários fluxos de entrada e saída de dinheiro de caixa verificado em diferentes momentos.

Receber uma quantia hoje ou no futuro não são evidentemente a mesma coisa. Em princípio, um unidade monetária hoje é preferível à mesma unidade monetária disponível amanhã. Postergar uma entrada de caixa (recebimento) por certo tempo envolve sacrifício, o qual deve ser pago mediante uma recompensa, definida pelos juros. Desta forma, são os juros que efetivamente induzem o adiamento do consumo, permitindo a formação de poupanças e de novos investimentos na economia.

A taxa de juros deve ser eficiente de maneira a remunerar:

a) o risco envolvido na operação (empréstimo ou aplicação), representando genericamente pela incerteza com relação ao futuro;

b) a perda do poder de compra do capital motivada pela inflação. A inflação é um fenômeno que corrói o capital, determinando um volume cada vez menor de compra com o mesmo montante.

c) o capital emprestado/aplicado. Os juros devem gerar um lucro(ou ganho) ao proprietário do capital como forma de compensar a sua privação por determinado período de tempo. Este ganho é estabelecido basicamente em função das diversas outras oportunidades de investimentos e definido por custo de oportunidade.

Taxa de Juro

A taxa de juro é o coeficiente que determina o valor do juro, isto é, a remuneração do fator capital utilizado durante certo período de tempo.

As taxas de juros se referem sempre a uma unidade de tempo (mês, semestre, ano, etc.) e podem ser representadas equivalentemente da duas maneiras: *taxa percentual* e *taxa unitária*.

A *taxa percentual* refere-se aos “centos”, ou seja, o valor dos juros para cada centésima parte do capital.

A *taxa unitária* centra-se na unidade de capital. Reflete o rendimento de cada unidade de capital em certo período de tempo.

Regras Básicas



Nas fórmulas de Matemática Financeira, tanto o prazo da operação como a taxa de juros devem necessariamente estar expressos na mesma unidade de tempo. Por exemplo, admita que um fundo de poupança esteja oferecendo juros de 2% ao mês e os rendimentos creditados mensalmente. Neste caso, o prazo a que se refere a taxa (mês) e o período de capitalização do fundo (mensal) são coincidentes, atendendo à regra básica.

Se uma aplicação foi efetuada pelo prazo de um mês, mas os juros definidos em taxa anual, não há coincidência nos prazos e deve ocorrer necessariamente um “rateio”. É indispensável para o uso das fórmulas financeiras transformar a taxa de juro anual para o intervalo de tempo definido pelo prazo da operação, ou vice versa, o que for considerado mais apropriado para os cálculos. Somente após a definição do prazo e da taxa de juro na mesma unidade de tempo é que as formulações da Matemática Financeira podem ser operadas.

Os critérios de transformação do prazo e da taxa para a mesma unidade de tempo podem ser efetuados através de regras de juros simples (média aritmética) e de juros compostos (média geométrica), dependendo do regime de capitalização definido para a operação.

Crítérios de Capitalização dos Juros

Os critérios (regimes) de capitalização demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo. Nesta conceituação podem ser identificados dois regimes de capitalização dos juros: *simples* (ou linear) e *composto* (ou exponencial).

O *regime de capitalização simples* comporta-se como se fosse uma progressão aritmética (PA), crescendo os juros de forma linear ao longo do tempo. Neste critério, os juros somente incidem sobre o capital inicial da operação (aplicação ou empréstimo), não se registrando juros sobre o saldo dos juros acumulados.

O *regime de capitalização composta* incorpora ao capital não somente os juros referentes a cada período, mas também os juros acumulados até o momento anterior. É um comportamento equivalente a uma progressão geométrica (PG) no qual os juros incidem sempre sobre o saldo apurado no início do período correspondente (e não unicamente sobre o capital inicial).

No regime composto há uma capitalização dos juros, também entendida por juros sobre juros; os juros são periodicamente incorporados ao saldo devedor anterior e passam, assim, a gerar juros. Quanto maior for o número de períodos de incidência dos juros, maior será a diferença à capitalização simples.

Aplicações Práticas dos Juros Simples e Compostos

O juro simples, principalmente diante de suas restrições técnicas, tem aplicações práticas bastante limitada. São raras as operações financeiras e comerciais que formam temporalmente seus montantes de juros segundo o regime de capitalização linear. O uso de juros simples restringe-se principalmente às operações praticadas no âmbito do curto prazo.

No entanto, as operações que adotam juros simples, além de se apresentarem geralmente prazos reduzidos, não costumam apurar o seu percentual de custo (ou rentabilidade por este regime). Os juros simples são utilizados para o



cálculo dos valores monetários da operação (encargos a pagar, para empréstimos, e rendimentos financeiros, para aplicações), e não para a apuração do efetivo resultado percentual.

É importante ressaltar, ainda, que muitas taxas praticadas no mercado financeiro (nacional e internacional) estão referenciadas em juros simples, porém a formação dos montantes das operações processa-se exponencialmente (juros compostos). Por exemplo, a caderneta de Poupança paga tradicionalmente uma taxa de juros de 6% ao ano para seus depositantes, creditando todo o mês o rendimento proporcional de 0,5%. A taxa referenciada para esta operação é linear, porém os rendimentos são capitalizados segundo o critério de juros compostos, ocorrendo ao longo dos meses juros sobre juros.

Para uma avaliação mais rigorosa do custo ou rentabilidade expressos em percentual, mesmo para aquelas operações que referenciam suas taxas em juros simples, é sugerida a utilização do critério de juros compostos. Tecnicamente mais correto por envolver a capitalização exponencial dos juros, o regime composto é reconhecimento adotado por todo o mercado financeiro e de capitais.

Uma observação mais detalhada, ainda, que outros segmentos além do mercado financeiro também seguem as leis dos juros compostos, tais como o estudo do crescimento demográfico, do comportamento dos índices de preços da economia, da evolução do faturamento e de outros indicadores empresariais de desempenho, dos agregados macroeconômicos, da apropriação contábil de receitas e despesas financeiras, etc.

Capitalização Contínua e Descontínua

Pode-se compreender que *regime de capitalização* é o processo em que os juros são formados e incorporados ao principal.

Podem ser identificados dois regimes de capitalização: *contínuo* e *descontínuo*.

A **capitalização contínua** é um regime que se processa em intervalos de tempo bastante reduzidos – caracteristicamente em intervalo de tempo infinitesimal – promovendo grande frequência de capitalização. A capitalização contínua, na prática, pode ser entendida em todo fluxo monetário distribuído ao longo do tempo e não somente num único instante, por exemplo, a faturamento de um supermercado, a formação do custo de fabricação no processamento fabril, a formação de depreciação de um equipamento, etc. são capitalizações que se formam continuamente, e não somente ao final de um único período (mês, ano).

O regime de capitalização contínua encontra enormes dificuldades em aplicações práticas, sendo pouco utilizado.

Na **capitalização descontínua** os juros são formados somente ao final de cada período de capitalização. A caderneta de poupança que paga juros unicamente ao final do período a que se refere sua taxa de juros (mês) é um exemplo da capitalização descontínua. Os rendimentos, neste caso, passam a ocorrer descontinuamente, somente um único momento do prazo da taxa (final do mês) e não distribuídos pelo mês.

De conformidade com o comportamento dos juros, a capitalização descontínua pode ser identificada em juros simples e juros compostos.

A aplicação desse regime de capitalização é bastante generalizada.



Fórmulas de Juros Simples

O valor dos juros é calculado a partir da seguinte expressão:

$$J = C \times i \times n,$$

onde : **J** é o valor dos juros expresso em unidades monetárias;

C é o capital. É o valor (em \$) representativo de determinado momento;

i é a taxa de juros, expressa em sua forma unitária;

n é o prazo.

Montante e Capital

Um determinado capital, quando aplicado a uma taxa periódica de juro por determinado tempo, produz um valor acumulado denominado de *montante*, e identificado em juros simples por **M**. em outras palavras, o montante é constituído do capital mais o valor acumulado dos juros, isto é:

$$M = C + J$$

No entanto, sabe-se que:

$$J = C \times i \times n$$

Substituindo esta expressão básica na formula do montante, e colocando-se C em evidencia:

$$M = C + C \times i \times n$$

$$M = C(1 + i \times n)$$

A expressão $(1 + i \times n)$ é definida como *fator de capitalização* (ou *de valor futuro*) dos juros simples. Ao multiplicar um capital por este fator, corrige-se o seu valor para uma data futura, determinando o montante. O inverso, ou seja, $1/(1 + i \times n)$ é denominado de *fator de atualização* (ou *de valor presente*). Ao se aplicar o fator sobre um valor expresso em uma data futura, apura-se o seu equivalente numa data atual.

Taxa Proporcional e Taxa Equivalente

Para se compreender mais claramente o significado destas taxas deve-se reconhecer que toda operação envolve dois prazos: (1) o prazo a que se refere a taxa de juros: (2) o prazo de capitalização (ocorrência) dos juros.

Por exemplo, admita um empréstimo bancário a uma taxa(custo) nominal de 24% ao ano. O prazo a que se refere especificamente a taxa de juros é anual. A seguir, deve-se identificar a periodicidade de ocorrência dos juros. Ao se estabelecer que os encargos incidirão sobre o principal somente ao final de cada ano, os dois prazos considerados são coincidentes.



O crédito direto ao consumidor promovido pelas financeiras é outro exemplo de operação com prazos iguais. Caracteristicamente, a taxa cobrada é definida ao mês e os juros capitalizados também mensalmente.

Mas em inúmeras outras operações estes prazos não são coincidentes. O juro pode ser capitalizado em prazo inferior ao da taxa, devendo-se nesta situação ser definido como o prazo da taxa será rateado ao período de capitalização.

Por exemplo, sabe-se que a caderneta de poupança paga aos seus depositantes uma taxa de juros de 6% ao ano, a qual é agregada (capitalizada) ao principal todo mês através de um percentual proporcional de 0,5%. Tem-se aqui, então, dois prazos – *prazo da taxa*: ano e *prazo de capitalização*: mês.

É necessário para o uso das formulas de matemática financeira expressar estes prazos diferentes na mesma base de tempo. Ou transforma-se o prazo específico da taxa para o de capitalização ou, de maneira inversa, o período de capitalização passa a ser expresso na unidade de tempo da taxa de juros.

No regime de juros simples, diante de sua própria natureza linear, esta transformação é processada pela denominada taxa proporcional de juros também denominada de taxa linear ou nominal. Esta taxa proporcional é obtida da divisão entre a taxa de juros considerada na operação e o número de vezes em que ocorrerão os juros (quantidade de períodos de capitalização).

A aplicação de taxas proporcionais é muito difundida, principalmente em operações de curto e curtíssimo prazo, tais como: cálculo de juros de mora, descontos bancários, créditos de curtíssimos prazos, apuração de encargos sobre saldo devedor de conta corrente bancária, etc.

As taxas de juros simples se dizem equivalentes quando, aplicadas a um mesmo capital e pelo mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo volume linear de juros.

Os juros produzidos pelas duas taxas lineares de juros são iguais, logo são definidas como equivalentes.

No regime de juros simples, taxas proporcionais (nominais ou lineares) e taxas equivalentes são consideradas a mesma coisa, sendo indiferente a classificação de duas taxas de juros como proporcionais ou equivalentes.

Juro Exato e Juro Comercial

É comum nas operações de curto prazo, onde predominam as aplicações com taxas referenciadas em juros simples, ter-se o prazo definido em número de dias. Nestes casos, o número de dias pode ser calculado de duas maneiras:

a) pelo tempo exato, utilizando-se efetivamente o calendário do ano civil (365 dias). O juro apurado desta maneira denomina-se juro exato;

b) pelo ano comercial, o qual admite o mês com 30 dias e ao ano com 360 dias. Tem-se por este critério, a apuração do denominado juro comercial ou ordinário.

Equivalência Financeira



O problema da equivalência financeira constitui-se no raciocínio básico da matemática financeira. Conceitualmente, dois ou mais capitais representativos de uma certa data dizem-se equivalentes quando, a uma certa taxa de juros, produzem resultados iguais numa data comum.

3. Juros Compostos

O regime de juros compostos considera que os juros formados em cada período são acrescidos ao capital formando o montante (capital mais juros) do período. Este montante, por sua vez, passará a render juros no período seguinte formando um novo montante (constituído do capital inicial, dos juros acumulados e dos juros sobre os juros formados em períodos anteriores), e assim por diante.

Tecnicamente, o regime de juros compostos é superior ao de juros simples principalmente pela possibilidade de fracionamento dos prazos. No critério composto, a equivalência entre capitais pode ser apurada em qualquer data, retratando melhor a realidade das operações que o regime linear.

Formulas de Juros Compostos

No regime de juros compostos, os juros são capitalizados, produzindo juros sobre juros periodicamente.

$$FV = PV(1 + i)^n,$$

onde $(1 + i)^n$ é o fator de capitalização (ou de valor futuro), e $1/(1 + i)^n$ o fator de atualização (ou de valor presente).

Mas, sabe-se que o valor dos juros (J) é apurado pela diferença entre o montante (FV) e o capital (PV), podendo-se obter o seu resultado também pela seguinte expressão:

$$J = FV - PV$$

Como :

$$FV = PV (1 + i)^n$$

Colocando-se PV em evidência:

$$J = PV \cdot [(1 + i)^n - 1]$$

Taxas Equivalentes



Instituto Superior de Educação do Vale do Juruena
Associação Juinense de Ensino Superior do Vale do Juruena
Pós-Graduação Lato Sensu em MATEMÁTICA FINANCEIRA: ENSINO E EMPRESARIAL
Prof. MS. MARCIO FONSECA

O conceito enunciado de taxa equivalente permanece válido para o regime de juros compostos diferenciando-se, no entanto, a fórmula de cálculo da taxa de juros. Por se tratar de capitalização exponencial, a expressão da taxa equivalente composta é a média geométrica da taxa de juros do período inteiro, isto é:

$$i_q = \sqrt[q]{1+i} - 1$$

onde: q = número de períodos de capitalização.

Taxa Nominal e Taxa Efetiva

A taxa efetiva de juros é a taxa dos juros apurada durante todo o prazo n, sendo formada exponencialmente através dos períodos de capitalização. Ou seja, taxa efetiva é o processo de formação dos juros pelo regime de juros compostos ao longo dos períodos de capitalização. É obtido pela seguinte fórmula:

$$\text{Taxa efetiva} = (1+i)^q - 1$$

onde q representa o número de períodos de capitalização dos juros.

Quando se trata de taxa nominal é comum admitir-se que a capitalização ocorre por juros proporcionais simples.

Bibliografia:

ASSAF NETO, Alexandre. *Matemática Financeira e suas aplicações*. 10ª ed. São Paulo: Atlas, 2008.

EWALD, Luiz Carlos. *Apostila Matemática Financeira e Análise de Investimento*. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1999.

MATHIAS, W. Franco; GOMES, J. Maria. *Matemática Financeira*. 2ª ed. São Paulo: Atlas, 1998.